

EN2719

Dispositivos Eletrônicos

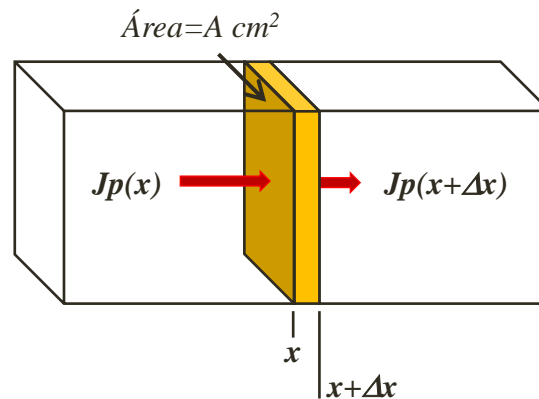
Equação da continuidade

Prof. Carlos Reis
Sala:705-1-A

Equação da continuidade

A compreensão da equação da continuidade é um requisito importante para o entendimento da dedução da equação do diodo que será feita na sequência.

Para isto, consideremos uma secção de um semiconductor do tipo-N, no qual foram injetadas lacunas minoritárias em excesso^[1], que se deslocam através desta secção. A atenção deve ser voltada para a densidade de lacunas em uma fatia de pequena espessura, Δx , desta secção.



Como existe uma corrente de lacunas, um certo número de lacunas é trazido pela corrente até o ponto x e um certo número de lacunas é arrastado pela corrente saindo da fatia Δx no ponto $(x+\Delta x)$. Além disso, dentro da fatia ocorrem simultaneamente geração e recombinação.

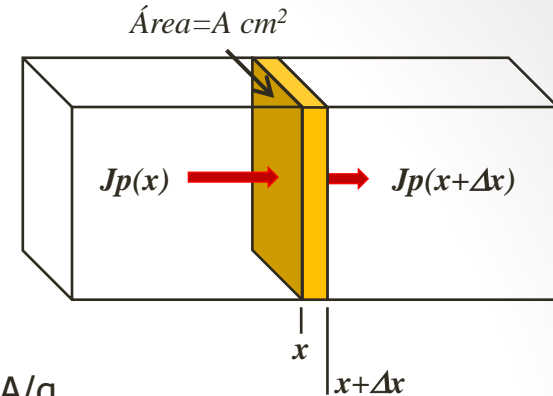
Vamos considerar que o regime é de baixa injeção, ou seja, $\Delta p \ll p_0$. A densidade de lacunas na fatia é p e a densidade de lacunas em equilíbrio é p_0 . Devido à injeção (ou acréscimo) de lacunas, $p > p_0$.

[1] Observe que a análise se refere a um material do tipo-N, que tem uma densidade p_0 de lacunas (minoritárias) em equilíbrio. Quando são injetadas lacunas, estabelecendo um excesso de lacunas, a concentração de lacunas no material aumenta!

A variável $J_p(x)$ indicada na figura é a densidade de corrente de lacunas, ou seja, é a carga de lacunas por centímetro quadrado que flui para dentro da fatia em cada segundo.

Assim, temos que:

- O número de Coulombs entrando por segundo é $J_p(x)A$
- O número de lacunas que entra na fatia a cada segundo é $J_p(x)A/q$.



Lembrando que “q” é a carga de uma lacuna!

De forma similar, o número de lacunas que sai da fatia em cada segundo é $J_p(x+\Delta x)A/q$. Portanto, a quantidade de lacunas dentro da fatia varia no tempo conforme a diferença:

$$\left[J_p(x) - J_p(x + \Delta x) \right] \cdot A / q \quad \text{Lacunas/segundo}$$

Por causa da recombinação dentro da fatia, o número de lacunas que entra na fatia em x é maior do que o número de lacunas que sai em (x+Δx) [1].

[1] Se uma certa quantidade de lacunas vai recombinar dentro da fatia, o número de lacunas entrando na fatia tem que ser maior do que o número de lacunas saindo!

Como o número de lacunas dentro da fatia ($pA\Delta x$) é maior do que o valor em equilíbrio ($p_0A\Delta x$)^[2], a taxa de recombinação dentro da fatia é ($pA\Delta x/\tau_p$) e a taxa de geração é ($p_0A\Delta x/\tau_p$).

Logo, a taxa de variação do número de lacunas devida à geração e recombinação é dada por:

$$\text{Geração-Recombinação} = \frac{p_0 A \Delta x}{\tau_p} - \frac{p A \Delta x}{\tau_p} = \frac{-(p - p_0) A \Delta x}{\tau_p}$$

Onde τ_p é o tempo de vida das lacunas no material do tipo-N. O sinal negativo indica que a concentração diminui enquanto $p > p_0$.

Devido à natureza uni-dimensional do fluxo de portadores minoritários, que foi assumida, as lacunas entram e saem da fatia somente através das faces x e $(x + \Delta x)$, respectivamente. O número total de portadores minoritários dentro da fatia é ($pA\Delta x$). Assim, podemos escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}(pA\Delta x) = \frac{-(p - p_0)}{\tau_p} A \Delta x + \frac{[J_p(x) - J_p(x + \Delta x)]}{q} A$$

O que esta equação representa é o seguinte: A taxa de variação de lacunas em Δx é igual à taxa (liquida) de geração & recombinação mais a taxa com que entram as lacunas na fatia, menos a taxa com que saem da fatia.

^[2] Observe que a análise se refere a um material do tipo-N, que tem uma densidade p_0 de lacunas (minoritárias) em equilíbrio. Quando é injetada uma quantidade adicional de lacunas, obviamente, a concentração de lacunas aumenta. Por isso, pode-se afirmar que dentro da fatia o número de lacunas é maior que o número de lacunas em equilíbrio ($p > p_0$).

Na equação anterior, a derivada parcial foi usada para indicar a variação de p com o tempo e com a distância x .

Dividindo a equação anterior por ($A\Delta x$):

$$\frac{1}{A\Delta x} \left[\frac{\partial}{\partial t} (p A \Delta x) \right] = \frac{1}{A\Delta x} \left[\frac{-(p - p_0)}{\tau_p} A \Delta x \right] + \frac{1}{A\Delta x} \left[\frac{[J_p(x) - J_p(x + \Delta x)]}{q} A \right]$$



obtemos a **equação da continuidade** em três dimensões para lacunas na região-N.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{(p - p_0)}{\tau_p} - \frac{1}{q} \text{div}(J_p)$$

De forma semelhante, chegamos à equação da continuidade em três dimensões para elétrons na região-P:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\frac{(n - n_0)}{\tau_n} + \frac{1}{q} \text{div}(J_n)$$

Considerações para determinar a equação do diodo

A expressão que relaciona a corrente com a tensão nos terminais de um diodo é considerada IDEAL devido às seguintes considerações:

1. A região de depleção corresponde a uma junção degrau, ou seja, a transição da região-P para a região-N é abrupta.
2. Não existem portadores na região de depleção – eles simplesmente a atravessam.
3. No corpo do diodo, fora da região de depleção, o semiconductor é eletricamente neutro.
4. O funcionamento se dá sempre em uma temperatura na qual todas as impurezas estão ionizadas.
5. Os contatos ôhmicos nas extremidades são perfeitos (resistências de contato nulas).
6. Opera em regime de fraca injeção quando polarizado diretamente. Ou seja, quando os elétrons da região-N e as lacunas da região-P migram para as regiões opostas, as densidades dos portadores nas fronteiras da nova região, onde se tornam minoritários, são muito menores que as densidades de equilíbrio dos portadores majoritários da região.
7. Não ocorre geração, nem recombinação na região de depleção. Portanto, as correntes de elétrons e de lacunas são constantes nesta região.

A equação do diodo será determinada a partir das expressões das correntes dos portadores minoritários em cada uma das duas regiões neutras. A soma destas correntes na junção constitui a corrente total do diodo.

A razão para usar os portadores minoritários em cada região neutra está na premissa 3: que o campo elétrico na região neutra é zero. Ou seja, não há movimento de deriva. Logo, a corrente de portadores minoritários na região neutra se deve apenas à difusão.

Em regime estacionário, a variação de concentração de portadores no tempo é nula:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

A equação de continuidade para as lacunas na região-N, nesta condição, é dada por:

$$-\frac{(p - p_0)}{\tau_p} - \frac{1}{q} \operatorname{div}(J_p) = 0 \quad \xrightarrow{\text{Em uma única dimensão, (x)}} \quad \frac{p - p_{0n}}{\tau_p} = -\frac{1}{q} \frac{dJ_p}{dx}$$

Onde p é a densidade de lacunas na posição x , p_{0n} é a densidade de lacunas em equilíbrio (G & R) na região-N e τ_p é o tempo de vida das lacunas nesta região.

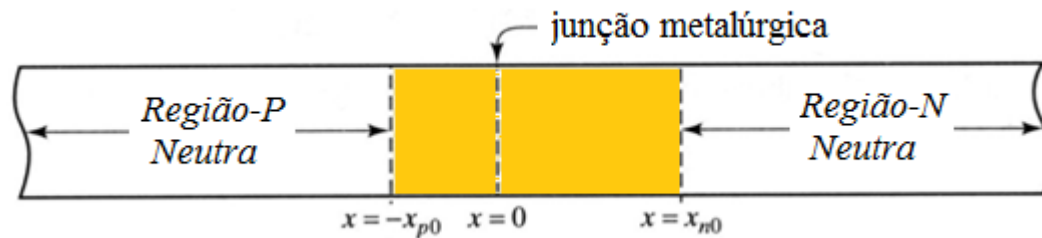
Como a corrente de lacunas minoritárias se deve somente à difusão, então:

$$J_p = -qD_p \frac{dp}{dx} \quad \longrightarrow \quad -\frac{p - p_{0n}}{\tau_p} + D_p \frac{d^2 p}{dx^2} = 0$$

Na equação anterior, chamemos a densidade de lacunas em excesso, $(p-p_{0n})$ de p' . Assim:

$$\frac{d^2 p'}{dx^2} - \frac{p'}{D_p \tau_p} = 0$$

Podemos alterar a origem da variável x , de tal modo que x_n é a nova origem ($x_n=0$) e que $x'=x-x_n$, sendo que x_n e $-x_p$ são os limites da região de depleção quando uma polarização é aplicada e que x_{n0} e $-x_{p0}$ são estes limites na condição de equilíbrio térmico.



Com isto, podemos determinar a solução da equação acima, que é:

$$p' = B_1 \exp\left(\frac{-x'}{L_p}\right) + B_2 \exp\left(\frac{x'}{L_p}\right)$$

Onde B_1 e B_2 são constantes de integração e L_p é o comprimento de difusão das lacunas na região-N, sendo dado por:

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p}$$

O comprimento de difusão representa a média das distâncias que os portadores minoritários, neste caso lacunas, se deslocam antes de recombinar (o mesmo que caminho livre médio – *mfp*):

Para determinar B1 e B2, são impostas duas condições de contorno:

$$\text{em } x'=0: \quad p'(0) = p_{0n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right]$$

$$\text{em } x'=W_n: \quad p'(W_n) = 0$$

V_a é a tensão aplicada e W_n é a distância na região-N desde a borda da região de depleção até o ponto de contato ôhmico.

Esta segunda condição de contorno indica que na extremidade externa da região-N, a densidade de portadores em excesso ($p-p_{0n}$) é zero. Em outras palavras, a densidade de lacunas assume o valor de equilíbrio.

Com estas condições impostas, chegamos à solução:

$$p' = \frac{p_{0n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \left[\exp\left(\frac{x'}{L_p}\right) - \exp\left(\frac{2W_n - x'}{L_p}\right) \right]}{1 - \exp\left(\frac{2W_n - x'}{L_p}\right)}$$

Antes de continuar, vale a pena considerar dois casos possíveis: Um em que $W_n \gg L_p$ e outro em que $W_n \ll L_p$. Por exemplo, $W_n \sim 10L_p$ e $W_n \sim 0,1L_p$.

Substituindo p' por $(p - p_{0n})$ e x' por $(x - x_n)$, a densidade de portadores em excesso na região-N em cada um destes casos será:

$$p' = p - p_{0n} = p_{0n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{x - x_n}{L_p}\right) \quad \text{Para } W_n \gg L_p$$

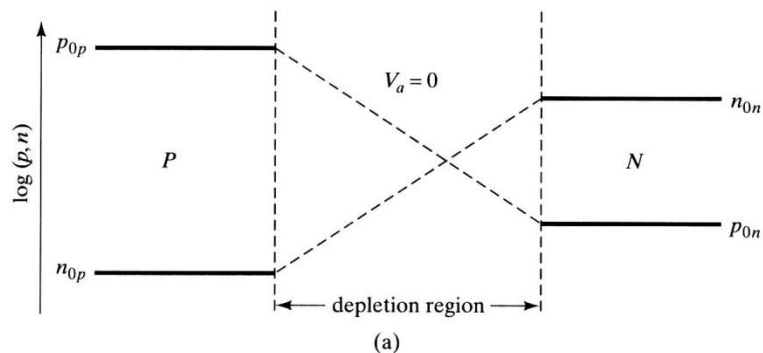
$$p' = p - p_{0n} = p_{0n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \left(1 - \frac{x - x_n}{W_n}\right) \quad \text{Para } W_n \ll L_p$$

Seguindo os mesmos procedimentos, determinamos a densidade de elétrons em excesso na região-P. Particularmente no caso em que $W_p \gg L_n$, temos:

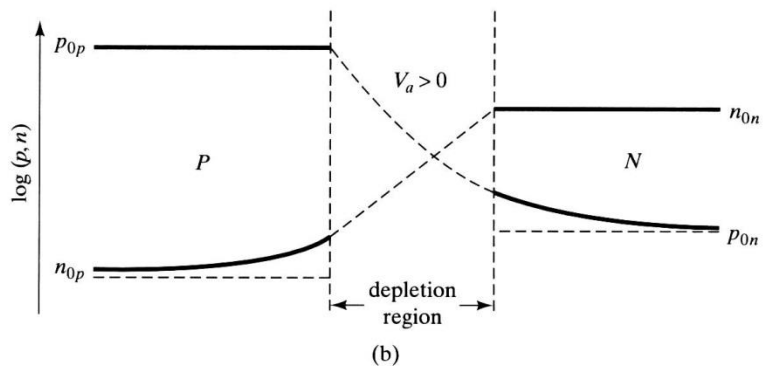
$$n' = n - n_{0p} = n_{0p} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{x + x_n}{L_n}\right)$$

Onde n' é a densidade de elétrons em excesso na região-P, n é a densidade de elétrons na região-P e n_{0p} é o valor da densidade de elétrons em equilíbrio na região-P.

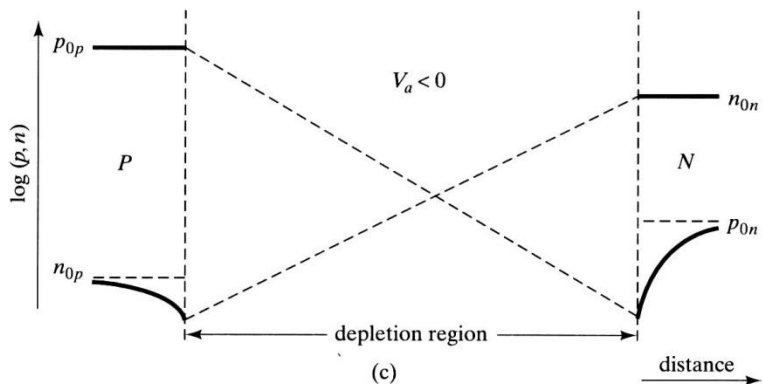
As figuras abaixo mostram as distribuições das densidades de portadores em diversas condições (equilíbrio, polarizada diretamente e inversamente).



Em equilíbrio



Com polarização direta $V_a > 0$



Com polarização inversa $V_a < 0$

Correntes através da junção

Conforme já observado, a corrente dos portadores minoritários se deve somente à difusão e a expressão para a densidade desta corrente é:

$$J_p = -qD_p \frac{dp}{dx} = -qD_p \frac{dp'}{dx}$$

Como temos uma expressão para a densidade de lacunas em excesso (p'), podemos calcular sua derivada e substituir na expressão acima:

$$J_p(x') = \frac{qD_p p_{0n}}{L_p} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \exp\left(\frac{-x'}{L_p}\right) \quad \text{Para } W_n \gg L_p$$

$$J_p(x') = \frac{qD_p p_{0n}}{W_n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad \text{Para } W_n \ll L_p$$

No ponto $x'=0$, ou $x=x_n$, a fronteira da região de depleção com a região-N, a primeira equação se torna:

$$J_p(x') = \frac{qD_p p_{0n}}{L_p} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad \text{Para } W_n \gg L_p$$

Onde D_p , p_{0n} e L_p se referem a lacunas na região-N e W_n é o comprimento da região-N neutra.

De forma análoga, chegamos à expressão para a densidade de corrente de elétrons na fronteira da região de depleção com a região-P:

$$J_n(-x_p) = \frac{qD_n n_{0p}}{L_n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \quad \text{Para } W_p \gg L_n$$

Onde D_n , n_{0p} e L_n se referem aos elétrons na região-P e W_p é o comprimento da região-P neutra.

Tendo em vista que todas as deduções até aqui se baseiam na condição de que as correntes dos portadores minoritários são contínuas através da região de depleção, então a densidade total de corrente na junção é dada pela soma:

$$J = J_p(x_n) + J_n(-x_p)$$

Consequentemente:

$$J = \frac{I}{A} = \left[\frac{qD_n n_{0p}}{L_n} + \frac{qD_p p_{0n}}{L_p} \right] \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right]$$

Para $W_n \gg L_p$ e $W_p \gg L_n$

Para um diodo inversamente polarizado, ou seja, com $V_a < 0$, a expressão da densidade de corrente é $J = J_s$, onde J_s é a densidade de corrente de saturação reversa, que é dada por:

$$J_s = q \left[\frac{D_n n_{0p}}{L_n} + \frac{D_p p_{0n}}{L_p} \right]$$

Para $W_n \gg L_p$ e $W_p \gg L_n$

A figura abaixo ilustra as distribuições das componentes das densidades de corrente. Lembrar que dentre as considerações feitas está a de que não ocorre recombinação na região de depleção. Portanto, as densidades de corrente de portadores minoritários em $x=x_n$ para J_p e em $x=-x_p$ para J_n têm os mesmos valores que têm em $x=-x_p$ e $x=x_n$, respectivamente.

A densidade de corrente total no diodo, J , é determinada pela soma de J_n e J_p na região de depleção.

