

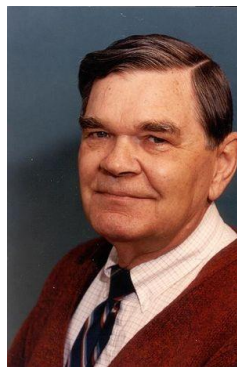
EN2719

Dispositivos Eletrônicos

Modelo Ebers-Moll para a polarização de transistores bipolares



Jewell J. Ebers



John L. Moll

Prof. Carlos Reis
Sala:705-1-A

Modelo de Ebers-Moll

Quando a condição $W_B \ll L_p$ (largura da base é muito menor do que o comprimento de difusão das lacunas) é imposta no equacionamento do transistor bipolar, neste caso um PNP, as correntes de emissor e de coletor assumem as seguintes formas.

$$I_E = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right] \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} \right] \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

$$I_C = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} \right] \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right] \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

Estas expressões podem ser simplificadas com a atribuição de nomes às suas parcelas. Assim, consideremos o seguinte:

$$I_{EF} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right] \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right)$$

$$\alpha_F = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}}}$$

$$I_{CR} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right] \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

$$\alpha_R = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}}}$$

Com a denominação dada às parcelas, as correntes nos terminais de Emissor, Base e Coletor do transistor se tornam:

$$I_E = I_{EF} - \alpha_R I_{CR}$$

$$I_C = \alpha_F I_{EF} - I_{CR}$$

$$I_B = I_E - I_C = I_{EF} (1 - \alpha_F) + I_{CR} (1 - \alpha_R)$$

Estas equações são conhecidas como as equações de Ebers-Moll para o transistor PNP. Naturalmente, para o transistor NPN as equações também se aplicam, bastando para isto considerar devidamente as polaridades das duas junções.

Ainda modificando as denominações de alguns termos destas equações, podemos considerar o seguinte:

$$I_{EF} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right] \exp \left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1 \right)$$

$$I_{ES} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right]$$

$$I_{CR} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right] \exp \left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1 \right)$$

$$I_{CS} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right]$$

É possível mostrar, por meio de um simples rearranjo das equações vistas que:

$$\alpha_F I_{ES} = \alpha_R I_{CS} = I_{SM}$$

Ou seja:

$$\alpha_F I_{ES} = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}}} \cdot qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right] = qA \frac{D_p p_0}{W_B}$$

$$\alpha_R I_{CS} = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}}} \cdot qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right] = qA \frac{D_p p_0}{W_B}$$

Temos, portanto, que.

$$I_{SM} = qA \frac{D_p p_0}{W_B}$$

Finalmente, podemos reescrever as equações de Ebers-Moll da seguinte forma:

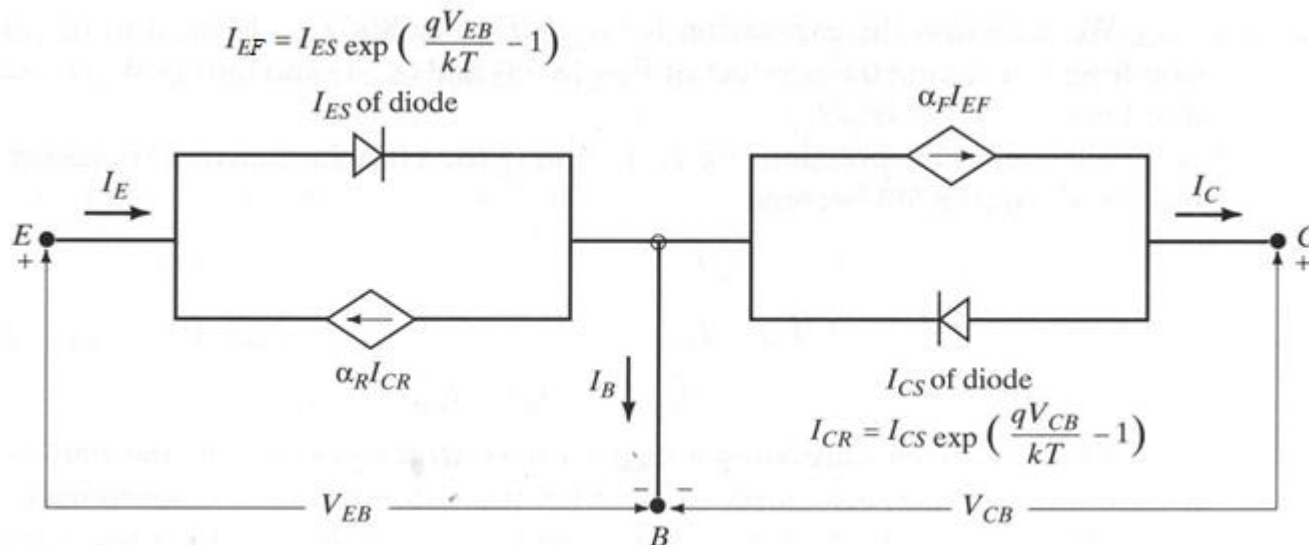
$$I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - \alpha_R I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

$$I_C = \alpha_F I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

Componente de condução direta (*forward*)

Componente de condução inversa (*reverse*)

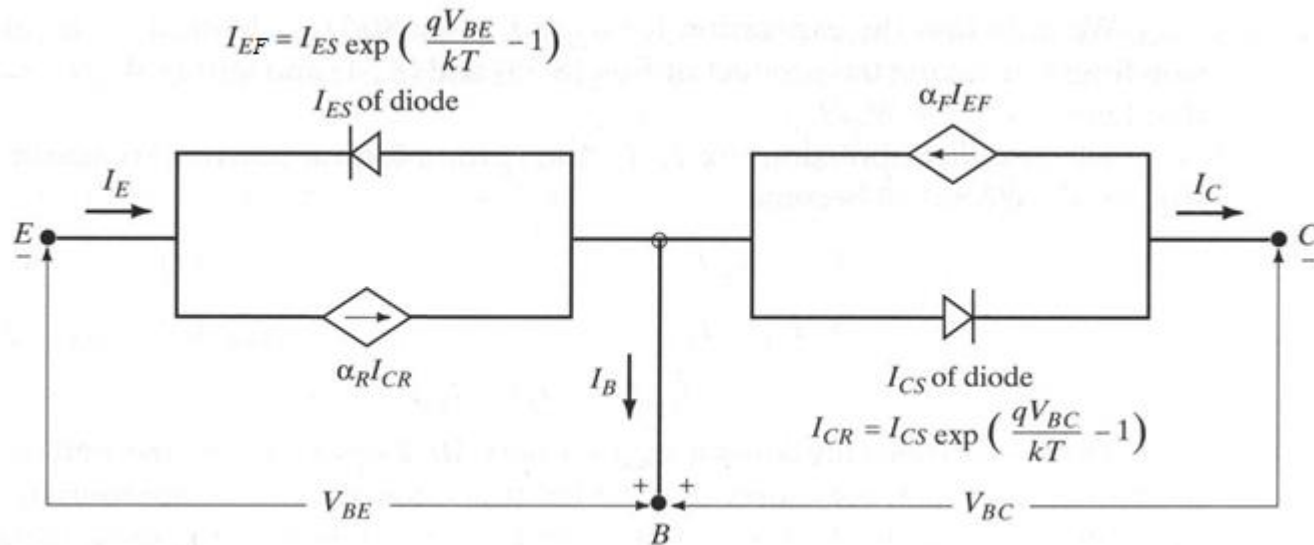
Estas equações claramente sugerem que o transistor pode ser representado pelo seguinte circuito equivalente (no caso, um transistor PNP):



A mesmo pode ser feito para o transistor NPN:

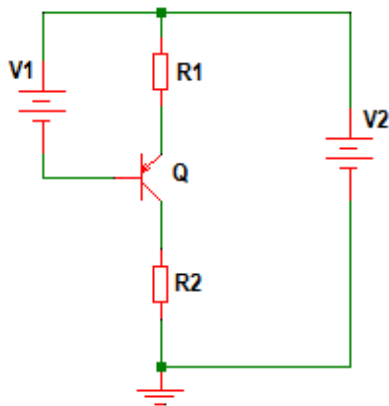
$$I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - \alpha_R I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

$$I_C = \alpha_F I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

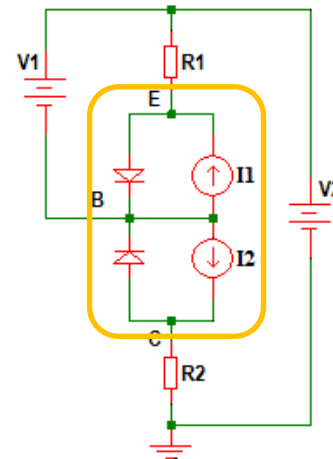


O modelo de Ebers-Moll é usado para determinar os potenciais e as correntes nos terminais de um transistor quando efetuamos a análise de grandes sinais.

Em essência, o processo de análise consiste na determinação das tensões e correntes nos terminais de cada transistor que participa do circuito. Para isto, devem ser consideradas as equações que regem o seu comportamento, tal como ilustra o exemplo mostrado abaixo:



Podemos substituir o símbolo do transistor pelo circuito equivalente que contém os dois diodos e as fontes de corrente.



De acordo com as equações desenvolvidas, a corrente de coletor é dada por:

$$I_C = \alpha I_E + I_{CB0} \quad \text{onde} \quad I_E = \frac{V_1 - V_{EB}}{R_1}$$

A tensão V_{EB} , por sua vez, está relacionada com a corrente I_E através de:

$$I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - \alpha_R I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right)$$

O segundo termo do lado direito desta equação pode ser desprezado, tendo em vista que a tensão V_{CB} é negativa. Ou seja:

$$I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right) - \alpha_R I_{CS} \exp\left(\frac{qV_{CB}}{kT} - 1\right) \quad I_E = I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT} - 1\right)$$

Considerando, ainda, que a tensão V_{EB} seja bem maior do que $(kT/q \approx 25\text{mV})$, então podemos desprezar o (-1) da exponencial. Assim:

$$I_E \approx I_{ES} \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT}\right) \Rightarrow V_{EB} = \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{I_E}{I_{ES}}\right)$$

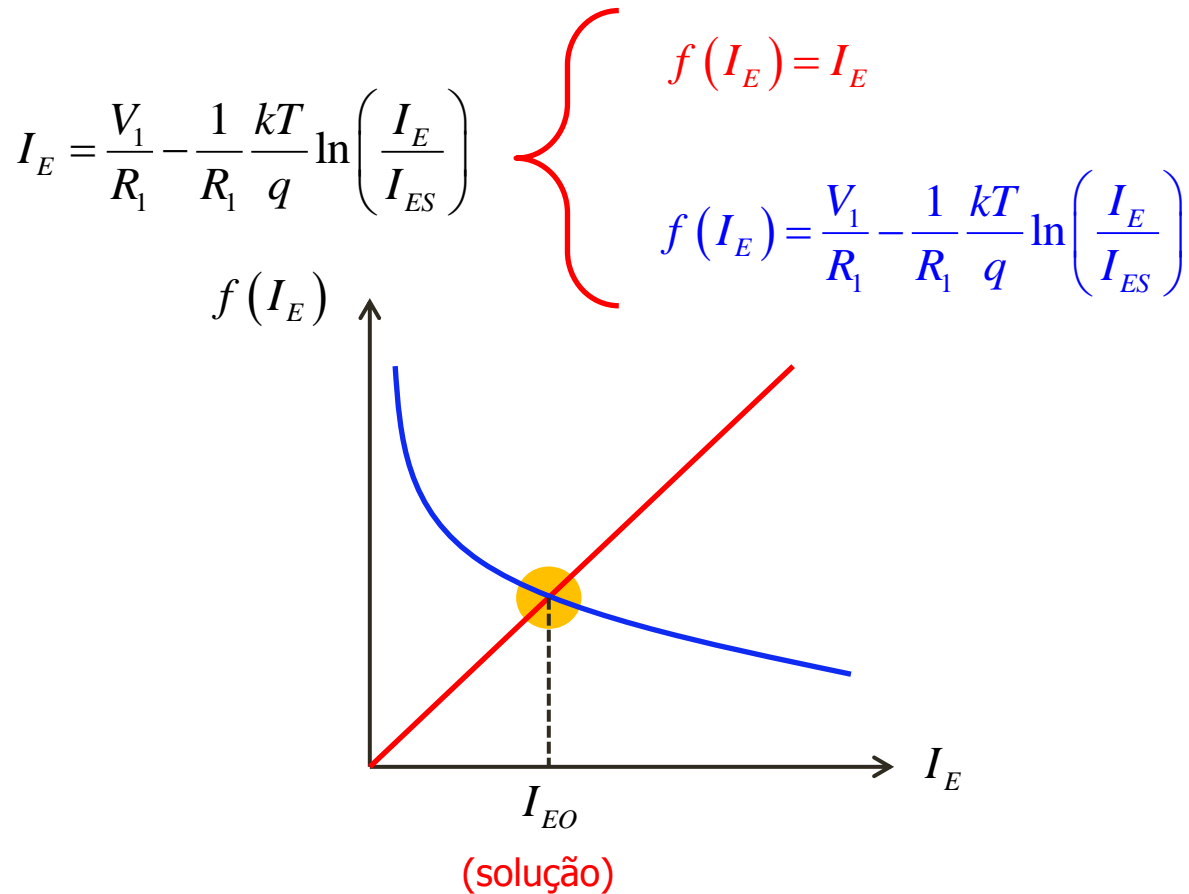
Reescrevendo esta relação na equação anterior, temos:

$$I_E = \frac{V_1 - V_{EB}}{R_1} \quad I_E = \frac{V_1}{R_1} - \frac{1}{R_1} \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{I_E}{I_{ES}}\right)$$

Chegamos, assim, a uma equação transcendental na variável I_E , para a qual não há solução analítica!

As equações transcendentais podem ser resolvidas utilizando métodos numéricos de aproximação sucessiva ou pelo método gráfico.

Utilizando o método gráfico, a solução da equação é o ponto de intersecção entre as funções que definem os dois lados da equação:



Uma vez determinada a corrente I_E , calcula-se a corrente de coletor,

$$I_C = \alpha I_E + I_{CB0}$$

desde que sejam conhecidos α e I_{CB0} .

EXERCÍCIO

Para ilustrar a aplicação das diversas relações e equações apresentadas até aqui, consideremos um transistor bipolar de silício tipo PNP que tem as seguintes características: $N_{AE}=10^{17}/\text{cm}^3$, $N_{DB}=10^{16}/\text{cm}^3$, $N_{AC}=10^{15}/\text{cm}^3$. Tem ainda uma área de secção efetiva $A=10^{-4}\text{cm}^2$, largura de base $W_B=1\mu\text{m}$ e tempo de vida dos portadores minoritários em todas as três regiões de $\tau=10^{-6}\text{s}$. As mobilidades dos portadores minoritários nas três regiões têm os seguintes valores:

$$\mu_{nE}=826\text{cm}^2/\text{V.s}, \mu_{pB}=447\text{cm}^2/\text{V.s} \text{ e } \mu_{nC}=1330\text{cm}^2/\text{V.s}.$$

Quando este transistor for submetido à tensão $V_{BE}=0,63\text{V}$, determine:

- I_{ES} e I_{CS}
- α_F e α_R
- O parâmetro Beta do transistor.

SOLUÇÃO

Inicialmente, determinamos as densidades de concentração dos portadores minoritários em cada uma das três regiões usando a seguinte relação:

$$n_0 p_0 = ni^2$$

Na região do emissor, temos $p_0 \approx N_{AE}=10^{17}/\text{cm}^3$. Logo:

$$n_{0E} = \frac{ni^2}{N_{AE}} = \frac{10^{20}}{10^{17}} = 10^3 / \text{cm}^3$$

Na região da base, temos $n_0 \approx N_{DB}=10^{16}/\text{cm}^3$. Logo:

$$p_{0B} = \frac{ni^2}{N_{DB}} = \frac{10^{20}}{10^{16}} = 10^4 / \text{cm}^3$$

Na região do coletor, temos $p_0 \approx N_{AC}=10^{15}/\text{cm}^3$. Logo:

$$n_{0C} = \frac{ni^2}{N_{AC}} = \frac{10^{20}}{10^{15}} = 10^5 / \text{cm}^3$$

SOLUÇÃO

Utilizando a relação de Einstein, determinamos as correspondentes constantes de difusão:

Na região do emissor, temos: $D_{nE} = 0,026 \times 826 = 21,4 \text{ cm}^2 / \text{s}$

Na região da base, temos: $D_{pB} = 0,026 \times 447 = 11,6 \text{ cm}^2 / \text{s}$

Na região do coletor, temos: $D_{nC} = 0,026 \times 1330 = 34,5 \text{ cm}^2 / \text{s}$

Os comprimentos de difusão são calculados através da expressão

$$L = \sqrt{D \cdot \tau}$$

Na região do emissor, temos: $L_{nE} = 4,62 \times 10^{-3} \text{ cm}$

Na região da base, temos: $L_{pB} = 3,4 \times 10^{-3} \text{ cm}$

Na região do coletor, temos: $L_{nC} = 5,87 \times 10^{-3} \text{ cm}$

A "constante" I_{ES} é dada por
$$I_{ES} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}} \right]$$

$$\therefore I_{ES} = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 1 \times 10^{-4} \left[\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} + \frac{21,4 \cdot 1 \times 10^3}{4,62 \times 10^{-3}} \right] = 18,634 \times 10^{-15} \text{ A}$$

SOLUÇÃO

A "constante" I_{CS} é dada por

$$I_{CS} = qA \left[\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}} \right]$$

$$\therefore I_{CS} = 1,6 \times 10^{-19} \cdot 1 \times 10^{-4} \left[\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} + \frac{34,5 \cdot 1 \times 10^5}{5,87 \times 10^{-3}} \right] = 27,963 \times 10^{-15} \text{ A}$$

Os valores de α_F , α_R e β , são dados por:

$$\alpha_F = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nE} n_{0E}}{L_{nE}}} = \frac{\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}}}{\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} + \frac{21,4 \cdot 1 \times 10^3}{4,62 \times 10^{-3}}} = 0,996$$

$$\alpha_R = \frac{\frac{D_p p_0}{W_B}}{\frac{D_p p_0}{W_B} + \frac{D_{nC} n_{0C}}{L_{nC}}} = \frac{\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}}}{\frac{11,6 \cdot 1 \times 10^4}{1 \times 10^{-4}} + \frac{34,5 \cdot 1 \times 10^5}{5,87 \times 10^{-3}}} = 0,663$$

$$\beta_F = \frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F} = \frac{0,996}{0,004} = 249$$

Aproximação na relação $I \times V$ do transistor bipolar

Em muitas situações, ao determinar a polarização (ou ponto de operação) do transistor, é conveniente aproximar a função exponencial que caracteriza a junção Base-Emissor por uma fonte de tensão constante com amplitude de cerca de 0,7V.

Embora este tipo de aproximação viole completamente a essência de como funciona o transistor, a consideração de que $V_{BE}=0,7V$ permite que se faça uma estimativa das correntes de base e de coletor.

A simplicidade que este tipo de aproximação introduz na estimativa dos valores de algumas variáveis do circuito justifica o seu uso, principalmente no processo de criação de circuitos.

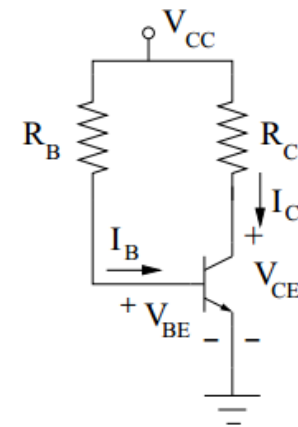
A estratégia de projeto de circuitos eletrônicos usada atualmente pressupõe o uso de ferramentas computacionais, os simuladores de circuitos, que tornam os projetistas praticamente isentos de lidar com as muitas e complexas equações envolvidas.

Podemos concluir, portanto, que este tipo de aproximação é útil na fase de concepção de um circuito, onde o projetista busca estabelecer valores às variáveis do circuito, refinando estes valores com o auxílio concomitante das ferramentas computacionais.

Vejamos como esta estimativa é feita no exemplo seguinte.

EXEMPLO - 1

No circuito ao lado, determine valores para R_C e R_B de tal modo que o transistor NPN fique polarizado no ponto $I_{CQ}=25\text{mA}$ e $V_{CE}=7.5\text{V}$. Considere $\beta=100$ e $V_{CC}=15\text{V}$.



SOLUÇÃO

Equacionando a malha que inclui os terminais Base e Emissor, temos:

$$V_{CC} - R_B I_B - V_{BE} = 0$$

Usando a relação entre I_B e I_C , ou seja:

$$\frac{I_C}{I_B} = \beta$$

A primeira equação pode ser reescrita como:

$$V_{CC} - R_B \frac{I_C}{\beta} - V_{BE} = 0$$

Substituindo os valores conhecidos, resulta que

$$R_B = \frac{(15 - 0,7)100}{25 \times 10^{-3}} = 57,2\text{K}\Omega$$

Da malha que inclui os terminais Coletor e Emissor, temos:

$$V_{CC} - R_C I_C - V_{CE} = 0$$

Substituindo os valores conhecidos, resulta que

$$R_C = \frac{(15 - 7,5)}{25 \times 10^{-3}} = 300\Omega$$

Discutir as fragilidades do método



EXEMPLO - 2

No circuito ao lado, determine valores para I_C e V_{CE} .

SOLUÇÃO

Se concluirmos que a influência do transistor no divisor de tensão formado por R_1 e R_2 é desprezível, a tensão no terminal de base será calculado como se a base do transistor não estivesse conectada a estes resistores. Ou seja:

$$V_B = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{EE}$$

Para isto, devemos determinar que resistência é vista a partir do nó **X** para o interior da base do transistor. A resistência vista, neste caso, é $\beta \cdot R_E$. Como o valor desta resistência vista ($150\text{k}\Omega$) é muito maior do que R_2 , podemos considerar a expressão anterior para calcular V_B . Portanto, $V_B = 6,88\text{V}$.

Fazendo a aproximação de que $V_{BE} \approx 0,7\text{V}$, temos

$$V_E = V_B + V_{BE} \Rightarrow V_E = 6,88 + 0,7 = 7,58$$

Como consequência, temos que

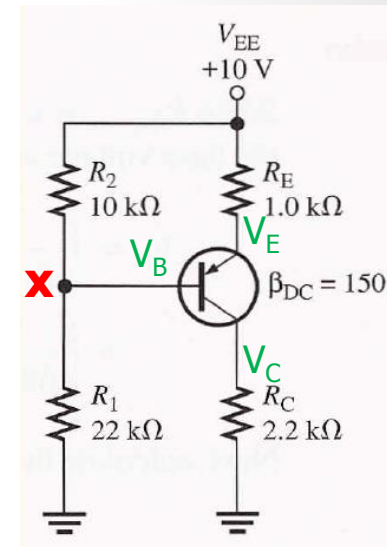
$$I_E = \frac{V_{EE} - V_E}{R_E} = \frac{10 - 7,58}{1.0\text{K}} = 2.42\text{mA}$$

Como o valor de β é razoavelmente alto, podemos considerar $I_C \approx I_E$. Logo:

$$I_C = 2.42\text{mA}$$

Por fim, determinamos a tensão V_{CE} :

$$V_{CE} = V_{CC} - R_E I_E - R_C I_C = 10 - 2,42 - 5,32 = 2,26\text{V}$$



0

EXEMPLO - 3

O circuito ao lado, tem a mesma configuração que o circuito anterior, porém valores diferentes. Determine I_C e V_{CE} .

SOLUÇÃO

Neste circuito, a resistência vista a partir do nó **X** é:

$$R_{in} = \beta R_E = 75 \times 2.2 K\Omega = 165 K\Omega$$

Este valor, comparado com R_2 , que é igual a $47 K\Omega$, indica que o transistor não pode ser ignorado no cálculo da tensão V_B . Sendo assim, o divisor de tensão é modificado com a introdução da resistência equivalente de entrada (R_{in}) em paralelo com R_2 . Assim:

$$V_B = \frac{R_1}{R_1 + (R_2 \parallel R_{in})} V_{EE} \quad \Rightarrow V_B = 3,9V$$

Fazendo a aproximação de que $V_{BE} \approx 0,7V$, temos

$$V_E = V_B + V_{BE} \Rightarrow V_E = 3,9 + 0,7 = 4,6V$$

Como consequência, temos que

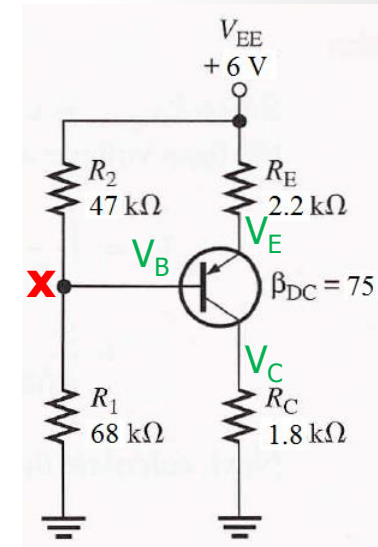
$$I_E = \frac{V_{EE} - V_E}{R_E} = \frac{6 - 4,6}{2.2K} = 636 \mu A$$

Como o valor de β é razoavelmente alto, podemos considerar $I_C \approx I_E$. Logo:

$$I_C = 636 \mu A$$

Por fim, determinamos a tensão V_{CE} :

$$V_{CE} = V_{CC} - R_E I_E - R_C I_C = 6 - 1,4 - 1,14 = 3,46V$$



EN2719

Dispositivos Eletrônicos

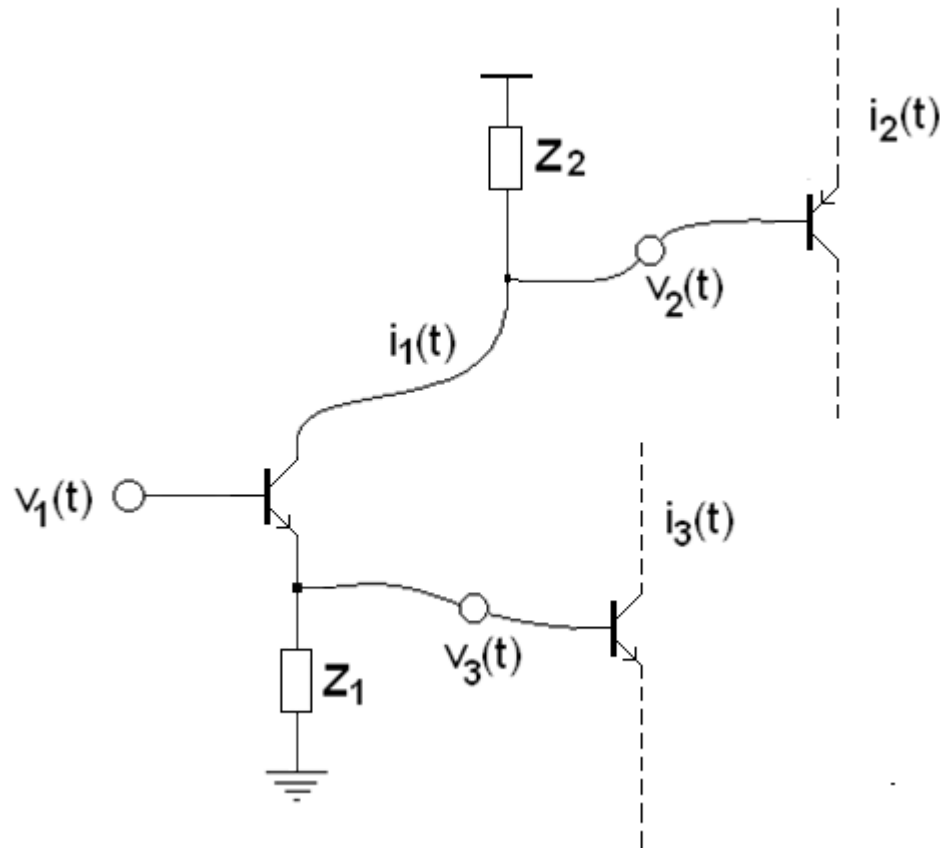
O Transistor Bipolar

- Parâmetros incrementais
- Modulação de largura da base (efeito Early)

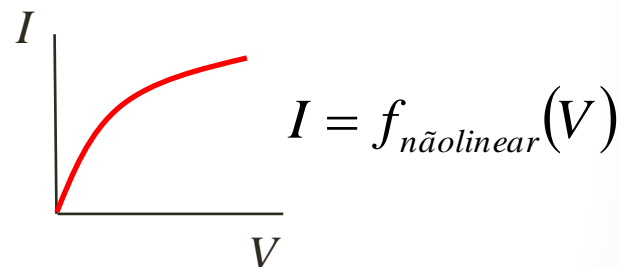
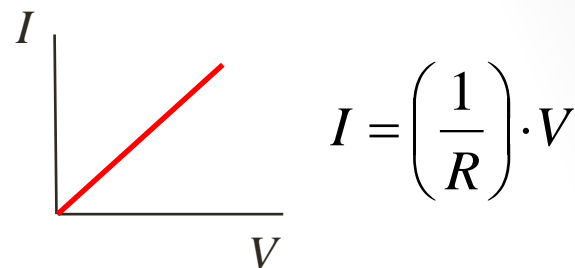
Prof. Carlos Reis
Sala:705-1-A

Parâmetros incrementais de um transistor bipolar

O processamento de sinais analógicos é, em essência, um processo contínuo de transformações de sinais de tensão em corrente e vice-versa, tendo como principal agente deste processo o transistor.



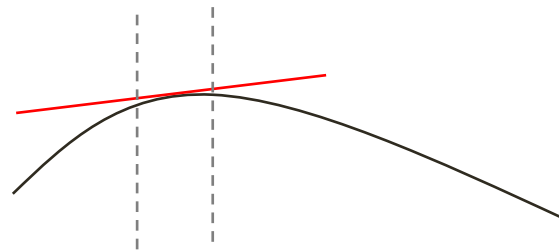
É particularmente interessante fazer com que estas transformações sejam lineares, pois facilita o dimensionamento destas transformações no estabelecimento das rotas que os diversos sinais devem percorrer no circuito.



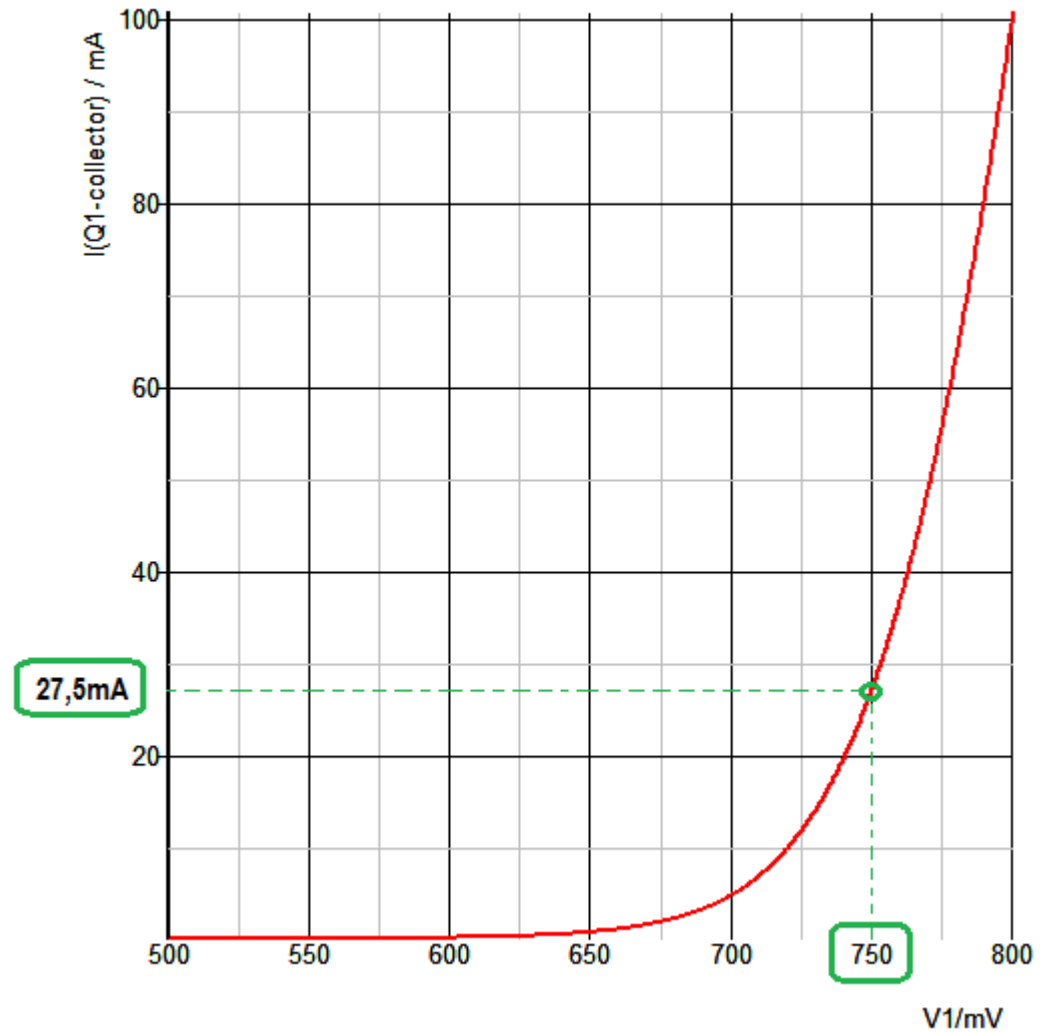
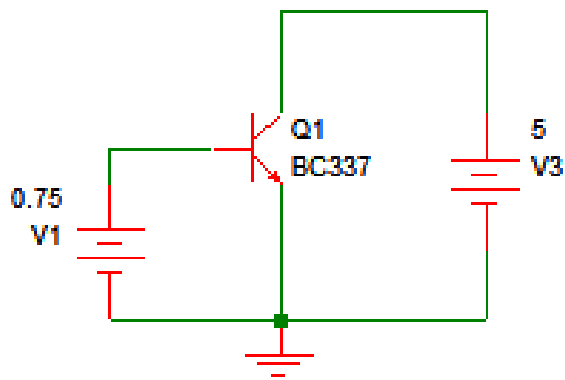
No caso de um transistor bipolar operando na região ativa, ou seja, com a junção Base-Emissor diretamente polarizada e a junção Base-Coletor inversamente polarizada. Já vimos que a relação Corrente e Tensão segue uma função exponencial, que pode ser aproximada por:

$$I_C = I_S \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_t}} - 1 \right)$$

Se considerarmos que as variáveis envolvidas nestas transformações têm pequena amplitude, então é bastante razoável admitir que a relação I-V do transistor seja substituída pela reta tangente no ponto em torno do qual a transformação considerada está sendo efetuada.

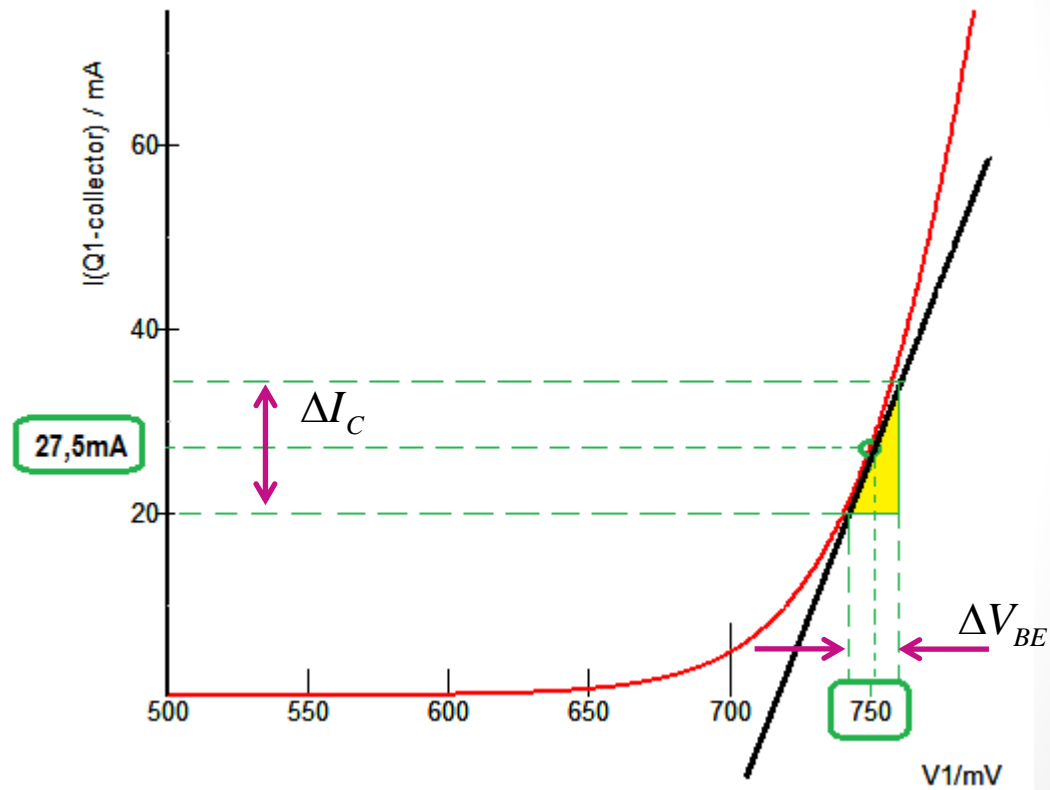
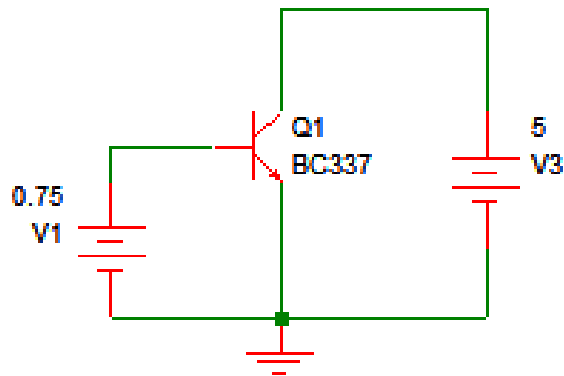


Este é o fundamento do que chamamos de **análise (ou tratamento) incremental** dos sinais.

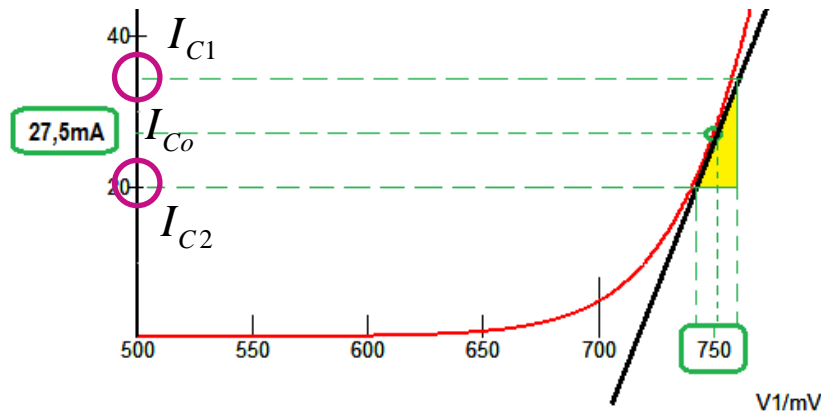


O transistor Q_1 , neste caso um BC337, está sujeito às diferenças de potenciais $V_{BE}=0,75\text{V}$, $V_{CE}=5,0\text{V}$ e $V_{BC}=4,25\text{V}$. Nestas condições a sua corrente de coletor é igual a 27,5mA.

Pequenas variações em V_{BE} provocam variações na corrente de coletor que podem ser previstas com razoável precisão se considerarmos o coeficiente angular da reta tangente à curva $I_C \times V_{BE}$ como sendo a constante de proporcionalidade entre a variação de I_C e a variação de V_{BE} .



Utilizando a equação que rege o transistor, podemos determinar as correntes de coletor em dois pontos próximos e opostos ao ponto de operação. Assim:



$$I_{C1} = I_{Co} + \frac{\Delta I_C}{2} = I_s \left(e^{\frac{V_{BEo} + \frac{\Delta V_{BE}}{2}}{V_t}} - 1 \right)$$

$$I_{C2} = I_{Co} - \frac{\Delta I_C}{2} = I_s \left(e^{\frac{V_{BEo} - \frac{\Delta V_{BE}}{2}}{V_t}} - 1 \right)$$

Subtraindo as duas correntes, temos:

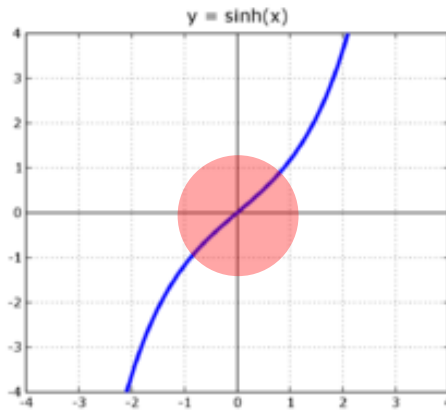
$$I_{C1} - I_{C2} \Rightarrow \frac{\Delta I_C}{I_s} = 2e^{\frac{V_{BEo}}{V_t}} \left(\frac{e^{\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t}} - e^{-\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t}}}{2} \right)$$

$$\frac{\Delta I_C}{I_s} = 2e^{\frac{V_{BEo}}{V_t}} \sinh\left(\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t}\right)$$

Ou ainda:

$$\frac{\Delta I_C}{2} = \left(I_s \cdot e^{\frac{V_{BEo}}{V_t}} \right) \sinh\left(\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t}\right)$$

Para valores de x próximos de zero, a função seno hiperbólico se aproxima de uma reta, ou seja:



$$\sinh(x) \approx x$$

Sendo assim, para variações de V_{BE} de pequena amplitude, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{\Delta I_C}{2} = \left(I_S \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \right) \sinh\left(\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t} \right) \approx \left(I_S \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \right) \left(\frac{\Delta V_{BE}}{2V_t} \right)$$

Além disto, como $I_S \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \approx I_{C0}$

$$\frac{\Delta I_C}{2} \approx \frac{I_{C0}}{V_t} \left(\frac{\Delta V_{BE}}{2} \right)$$

O resultado obtido mostra que quando ocorrem pequenas variações em torno da tensão V_{BE0} , na qual o transistor se encontra polarizado, a corrente de coletor sofre variações na sua amplitude em proporção direta com as variações de V_{BE} . A constante de proporcionalidade entre as variações da corrente de coletor e as variações da tensão V_{BE} é um parâmetro incremental denominado Transcondutância (g_m).

$$\Delta I_C \approx g_m \Delta V_{BE} \quad \text{onde}$$

$$g_m = \frac{I_{Co}}{V_t}$$

Retornando ao exemplo do transistor polarizado no ponto $V_{BE0}=0,75V$ e $I_{Co}=27,5mA$. Temos que:

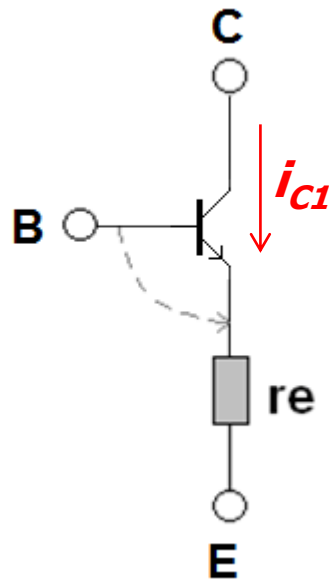
$$g_m = \frac{27,5mA}{26mV} = 1,06A / V$$

Com este valor de transcondutância, se a tensão V_{BE} variar de $\pm 10mV$ em torno dos $750mV$ que o polariza, a corrente de coletor variará de $\pm 10,6mA$ em torno de $27,5mA$.

Claramente, a transcondutância é um parâmetro que informa de modo quantitativo qual é a consequência na corrente de coletor de uma variação na amplitude da tensão V_{BE} (causa) do transistor.

Pudemos, também, observar que a transcondutância tem como dimensão o inverso de uma resistência. Portanto, podemos definir uma resistência cujo valor é o inverso da transcondutância e usar este valor de resistência para prever a amplitude das variações de I_C provocadas por variações em V_{BE} .

Este resistor, pode ser usado nas análises incrementais (pequenos sinais) de circuitos com transistores, compondo juntamente com o símbolo do transistor uma estrutura adequada para a estimativa do seu comportamento.



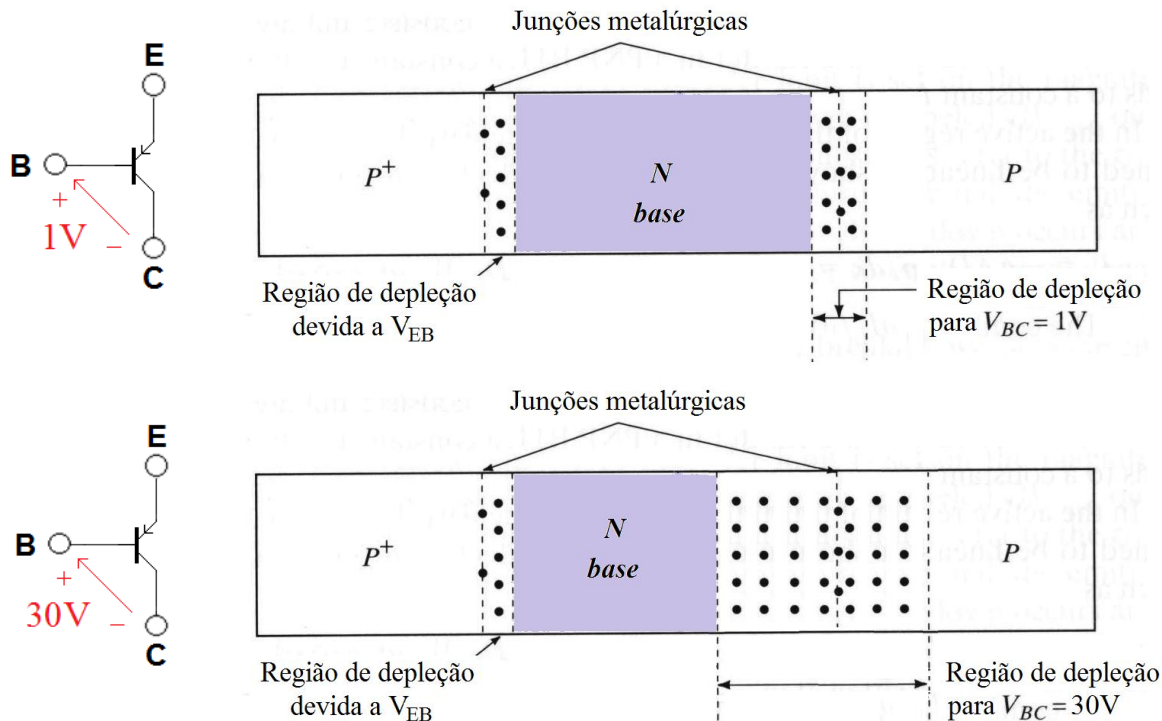
$$i_{c1} = \frac{\Delta V_{BE}}{re}$$

$$re = \frac{1}{g_m} = \frac{V_t}{I_{Co}}$$

Aproximação na relação $I \times V$ do transistor bipolar

Vimos, ao estudar o diodo, que a largura da região de depleção varia quando uma tensão externa é aplicada. Um aumento da tensão de polarização direta faz com que a largura da região de depleção diminua e que um aumento da tensão de polarização inversa causa um aumento na largura desta região.

Um aumento da tensão entre Base e Coletor de um transistor PNP, por exemplo, faz com que aumente a largura da região de depleção nesta junção e isto reduz a largura efetiva da base do transistor, conforme ilustram as figuras abaixo.



A densidade de portadores minoritários no lado da base da junção Base-Emissor é determinada pela tensão V_{EB} . A densidade de portadores minoritários no lado da base da junção Base-Coletor é praticamente zero.

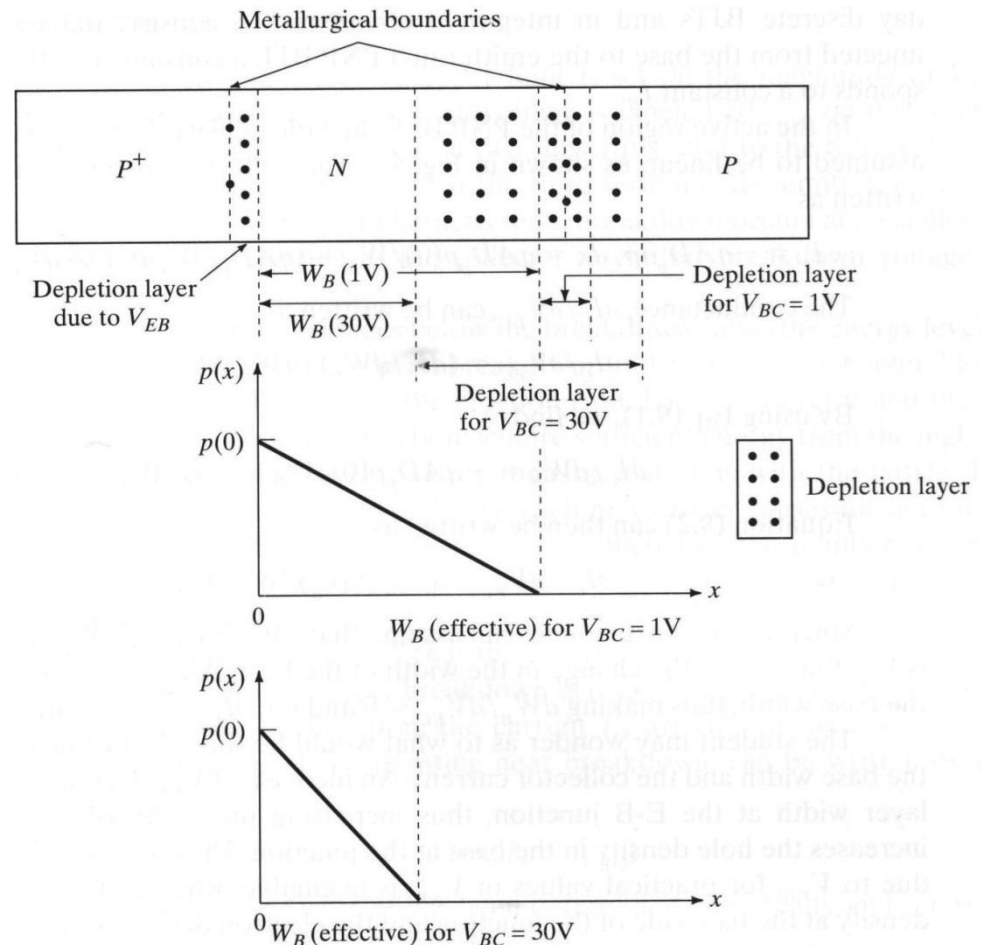
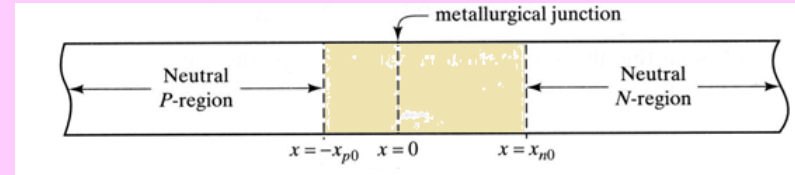
Lembrar que quando $W_n < L_p$

$$p' = p - p_{0n} = p_{0n} \left[\exp\left(\frac{qV_a}{kT}\right) - 1 \right] \left(1 - \frac{x'}{W_n} \right)$$

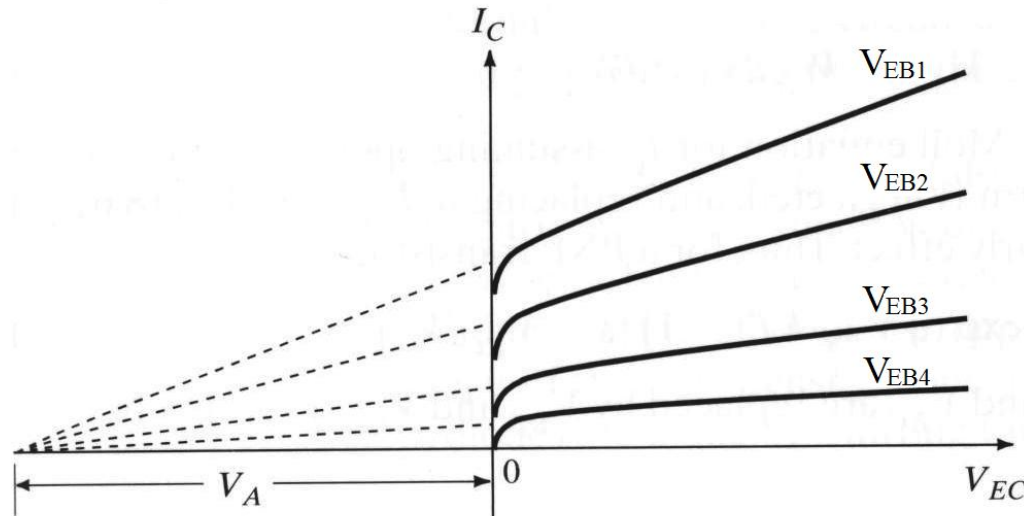
Ou seja, p' é linear com V_a

Mantendo V_{EB} constante, um aumento na tensão V_{CE} implica neste mesmo aumento em V_{CB} , tendo como consequência uma diminuição na largura da base, ao mesmo tempo que a densidade de portadores minoritários no lado da base permanece praticamente a mesma.

O resultado disto é um aumento do gradiente da distribuição linear de lacunas na base, umentando assim a corrente de coletor.



Justifica-se, assim, a inclinação das curvas $I_C \times V_{EC}$ obtidas com um valor constante de V_{EB} .



É interessante notar que as extrapolações lineares das curvas de V_{EB} constantes convergem para (aproximadamente) um ponto no eixo de V_{EC} . Este ponto é a tensão $V_{EC} = -V_A$.

Operando na região ativa, ou seja, com a junção Base-Emissor diretamente polarizada e a junção Base-Coletor inversamente polarizada, a densidade de portadores minoritários na base (lacunas, no caso do transistor PNP) é linear. Conforme visto anteriormente, nestas condições, a corrente de coletor pode ser escrita como:

$$I_C = -qA_E D_p \frac{dp}{dx} = \frac{qA_E D_p}{W_B} p'(0) \exp\left(\frac{qV_{EB}}{kT}\right)$$

A variação da corrente de coletor que resulta da variação de V_{EC} , mantendo-se V_{EB} constante, pode ser representada por uma condutância definida como.

$$\frac{\partial I_C}{\partial V_{EC}} = \frac{dI_C}{dW_B} \frac{dW_B}{dV_{EC}}$$

A derivada da corrente de coletor com relação à largura de base é dada por:

$$\frac{dI_C}{dW_B} = -\frac{qA_E D_p}{W_B^2} p'(0) = -\frac{I_C}{W_B}$$

Logo, a primeira equação acima pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial I_C}{\partial V_{EC}} = -\frac{I_C}{W_B} \frac{dW_B}{dV_{EC}}$$

Como V_{EB} é constante, podemos considerar que $\frac{dW_B}{dV_{EC}} = \frac{dW_B}{dV_{BC}}$

Além disto, como a largura da base diminui com o aumento da tensão V_{BC} , a derivada acima é negativa. Consequentemente, a derivada de I_C em relação a V_{EC} deve ser positiva, conforme já havia sido previsto!

Este fenômeno de um aumento na corrente de coletor em consequência de um aumento na tensão V_{EC} foi primeiro descrito por James Early e se tornou por isso conhecido como **efeito Early**.

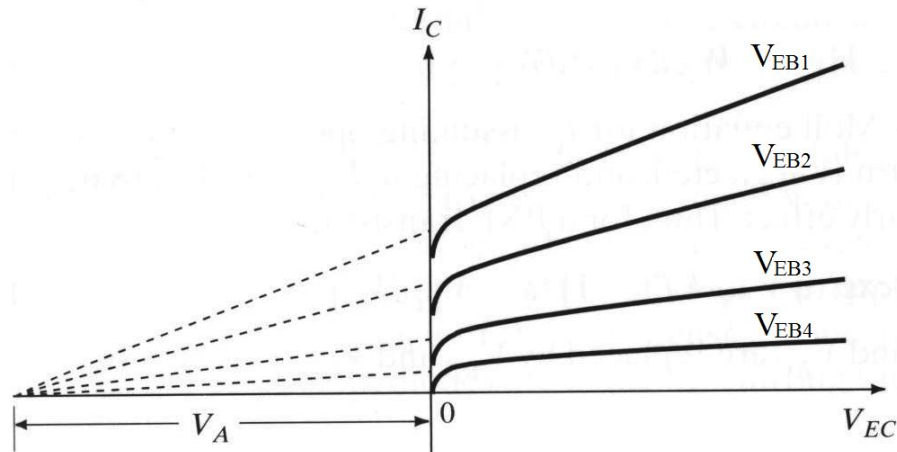
O fenômeno é também conhecido como **efeito de modulação da largura da base** e a tensão V_A é o fator de modulação ou **tensão Early**.

Retomando as curvas $I_C \times V_{EC}$, temos que:

$$\left| \frac{I_C}{V_A} \right| = \frac{dI_C}{dV_{EC}}$$

Portanto,

$$V_A = -W_B \frac{dV_{EC}}{dW_B}$$



O efeito de modulação da largura de base modifica a relação $I_C \times V_{EC}$ do transistor bipolar da seguinte maneira.

$$I_C = I_S \left(e^{\frac{V_{EB}}{V_t}} - 1 \right) \left(1 + \frac{V_{EC}}{|V_A|} \right)$$

O efeito de modulação da largura de base evidencia a dependência da corrente de coletor à tensão entre os terminais de Coletor e Emissor. Com isto, o transistor deve ser entendido como um dispositivo que converte as variações de tensão entre os terminais de Base e Emissor e as variações de tensão entre os terminais de Coletor e Emissor em variações de corrente de coletor.

Portanto, as variações na corrente de coletor são consequências de duas causas: Uma mais expressiva, que é a variação de V_{EB} e outra, menos expressiva, que é a variação de V_{EC} .

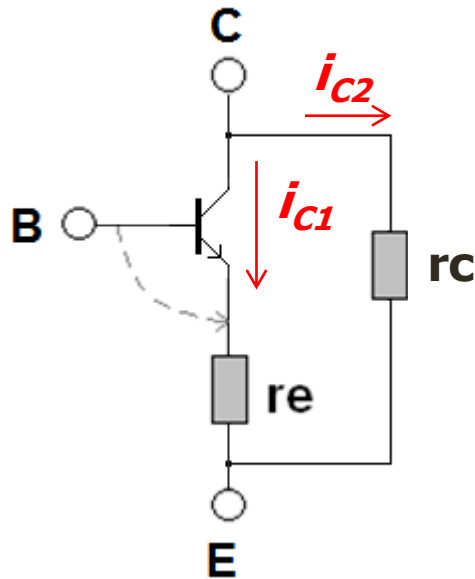
Já vimos que as variações de pequena amplitude da corrente de coletor estão relacionadas com as variações de V_{EB} através de um parâmetro (incremental) chamado g_m , ou do seu inverso, denominado r_e .

Da mesma forma, podemos relacionar as variações de pequena amplitude da corrente de coletor com as variações de V_{EC} através de um outro parâmetro, que também tem dimensões de condutância, chamado g_c . Este parâmetro, que é incremental, é definido como:

$$g_c = \frac{dI_C}{dV_{EC}} \Rightarrow g_c = \frac{I_C}{|V_A|} \quad \text{O inverso deste parâmetro tem dimensão de resistência} \quad r_c = \frac{1}{g_c} = \frac{|V_A|}{I_C}$$

O resistor incremental r_c pode ser acrescentado ao símbolo do transistor, inserindo-o entre os terminais de Coletor e Emissor, nas análises incrementais

Com isto, um transistor NPN (por exemplo) que tenha sido polarizado no ponto I_{C0} - V_{BE0} - V_{CE0} , pode ser representado, nas análises de pequenos sinais da seguinte forma.



$$i_{c1} = \frac{\Delta V_{BE}}{re}$$

$$re = \frac{1}{g_m} = \frac{V_t}{I_{C0}}$$

$$i_{c2} = \frac{\Delta V_{CE}}{rc}$$

$$rc = \frac{1}{g_c} = \frac{|V_A|}{I_{C0}}$$

Exercício



Supondo que a **mosquinha** acima seja na verdade uma fonte de tensão disfarçada que produz um sinal com amplitude de 100uVpp entre os seus terminais. Quando esta fonte “pousar” entre a outra fonte DC de 0,6V e a base do transistor, qual deve ser a amplitude pico-a-pico da tensão observada no seu coletor? Suponha que a tensão Early deste transistor tende a infinito.

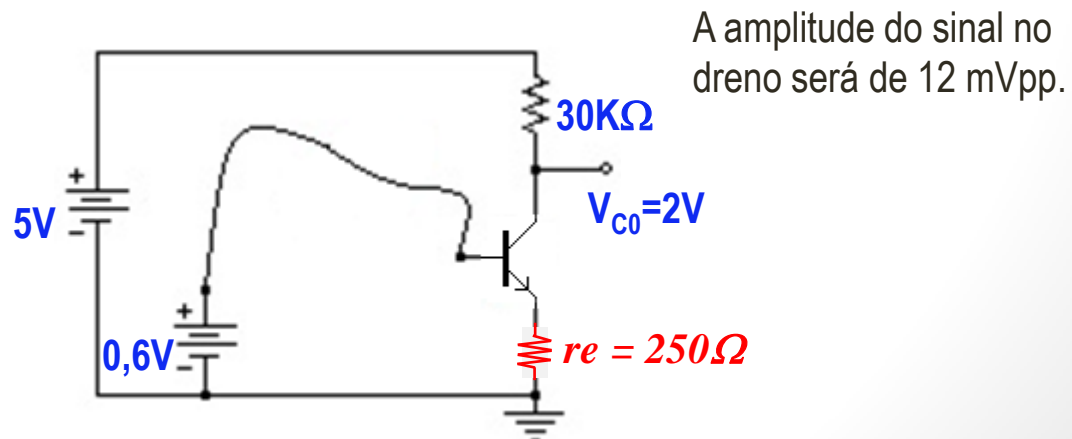
Solução:

Sabe-se que a amplitude da variação de corrente de coletor que resulta da variação da tensão V_{be} é determinada através do parâmetro incremental r_e . Como a tensão Early do transistor tende a infinito, mesmo que haja variações na tensão V_{CE} , a influência disto na corrente de coletor é praticamente nula. O parâmetro incremental r_e é dado por.

$$r_e = \frac{V_t}{I_{Co}}$$

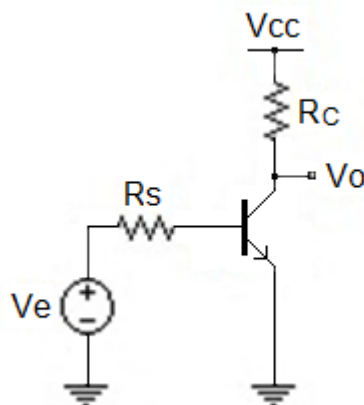
Como a tensão (estática) do coletor é 2V e a resistência de carga é 30K Ω , a corrente de polarização do transistor é 100uA. Esta informação é suficiente para determinarmos o parâmetro incremental r_e . Ou seja:

$$r_e = \frac{0,025}{10^{-4}} = 250 \, \Omega$$



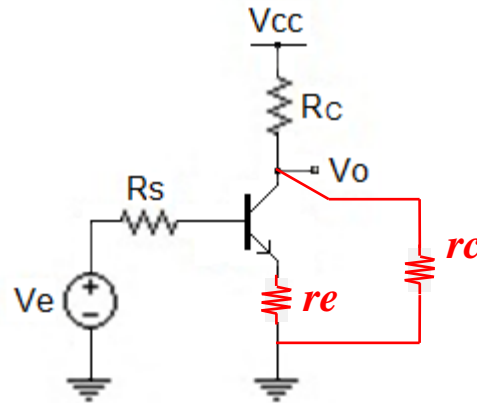
Amplificador emissor comum

O circuito que implementa o amplificador emissor comum com um transistor NPN é o seguinte.



Neste circuito, R_s representa a resistência de saída da fonte e R_C representa a resistência de carga. V_e é a fonte cujo sinal de tensão deve ser amplificado.

Para a análise deste circuito em busca de uma expressão para o ganho de tensão, consideremos que o transistor se encontra em um determinado ponto de operação que é determinado pelo nível DC da tensão V_e (chamemos de V_{e0}). Uma vez polarizado, podemos determinar os parâmetros incrementais (r_e e r_c).



Se considerarmos que a resistência de entrada do transistor é muito alta (que equivale a desprezar a corrente de base), a tensão V_{e0} coincide com a tensão V_{BE0} . Sendo assim, a correspondente corrente de polarização I_{C0} pode ser obtida pela equação que rege o transistor. Ou seja:

$$I_{C0} = I_S \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \left(1 + \frac{V_{CE0}}{|V_A|} \right)$$

Os parâmetros I_S e V_A , são propriedades do transistor. Portanto, normalmente são conhecidos num projeto.

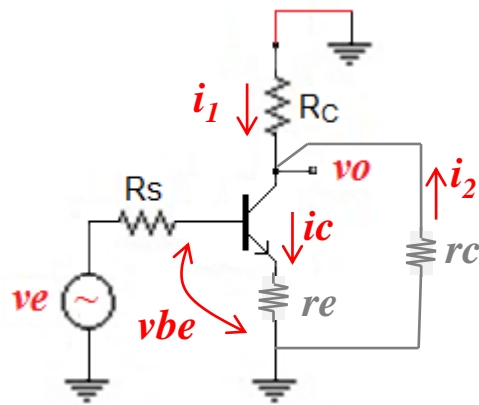
A partir destes parâmetros e dos valores de V_{BE0} e I_{C0} (polarização do transistor), são determinados os valores dos parâmetros incrementais:

$$r_e = \frac{V_t}{I_{C0}}$$

$$r_c = \frac{|V_A|}{I_{C0}}$$

As variações incrementais (sinais de pequena amplitude) de V_{BE} , provocam variações incrementais na corrente de coletor. Para estas variações incrementais atribuiremos, doravante, letras minúsculas.

Ou seja, $v_{be} = \Delta V_{BE}$



$$i_c = \frac{v_{be}}{r_e}$$

$$i_c = i_1 + i_2$$

$$i_1 = \frac{0 - v_o}{R_C}$$

$$i_2 = \frac{0 - v_o}{r_c}$$

Por substituição:

$$\frac{v_{be}}{r_e} = \frac{-v_o}{R_C} - \frac{v_o}{r_c}$$

Observe que $v_{be} \equiv v_e$

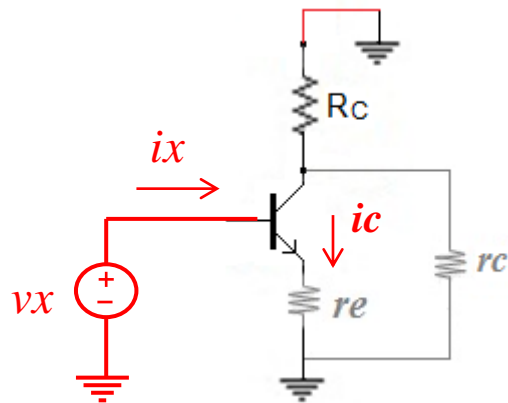
Logo, o ganho de tensão é:

$$A_v = \frac{v_o}{v_e} = - \frac{\left(\frac{r_c \cdot R_C}{r_c + R_C} \right)}{r_e}$$

ou

$$A_v = - \frac{R_C || r_c}{r_e}$$

Para determinar a **resistência** (e não impedância) **de entrada**, em baixa frequência, deste circuito, devemos calcular qual é a variação de corrente (i_x) que resulta de uma variação de pequena amplitude na tensão da entrada (v_x), mantendo aterradas as demais entradas de tensão e abertas as de corrente.

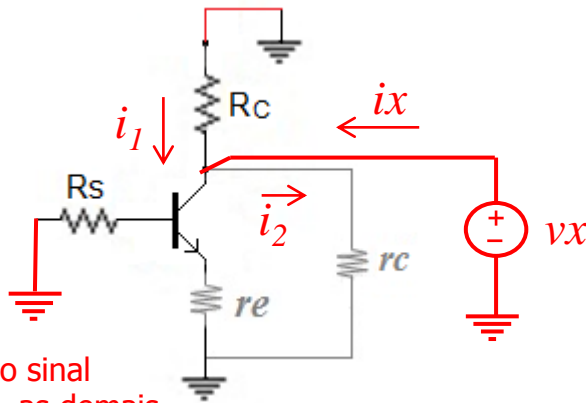


Temos que: $i_c = \frac{v_x}{r_e}$

Como: $\frac{I_C}{I_B} = \beta \Rightarrow i_c = \beta \cdot i_b$

Mas $i_b = i_x \quad \therefore R_{in} = \beta \cdot r_e$

Outra propriedade de grande importância em amplificadores é a **resistência de saída**. Vejamos como determiná-la, no caso deste circuito.



Como não há variação da tensão V_{BE} , a variação da corrente de coletor devida a r_e é nula. Nestas condições:

$$i_1 + i_x = i_2 \Rightarrow \frac{0 - v_x}{R_C} + i_x = \frac{v_x}{r_e}$$

Como o único sinal variável é v_x , as demais fontes de sinais são consideradas "terras ac".

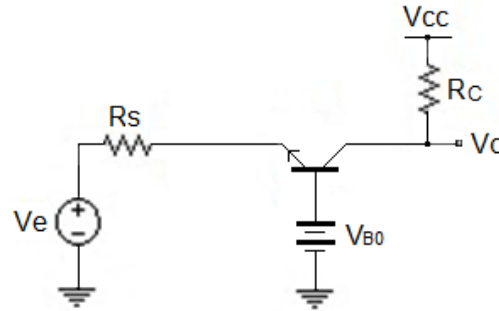
ou ainda, $i_x = \frac{v_x}{r_e} + \frac{v_x}{R_C}$

Portanto:

$$R_o \triangleq \frac{v_x}{i_x} = \frac{r_e \cdot R_C}{r_e + R_C}$$

Amplificador base comum

O circuito que implementa um amplificador base comum com transistor NPN é mostrado abaixo:



A tensão aplicada na base, V_{B0} , é constante (DC), enquanto as tensões nos outros terminais podem variar. A denominação "base comum" se deve à invariabilidade da tensão no terminal de base.

A fonte V_e tem uma componente DC, V_{e0} , e a componente incremental associada, que tem amplitude ve , é a variável que deve ser amplificada.

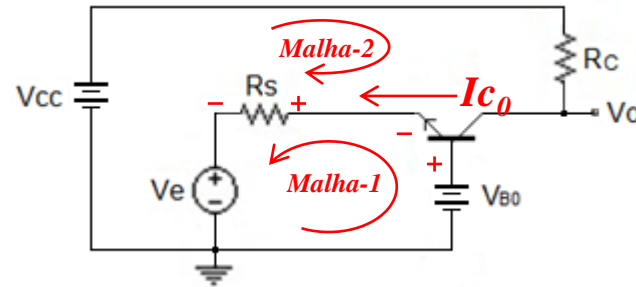
R_s representa a resistência de saída da fonte V_e e R_C a resistência de carga.

$$V_e = V_{e0} + ve$$

↑
Componente DC (polarização)

↑
Componente incremental

Para dimensionar este circuito, ou seja, determinar os valores dos componentes envolvidos, parte-se da condição que o transistor se encontre em um determinado ponto de operação. Isto significa que a corrente de coletor quiescente tem amplitude I_{C0} e que a tensão entre Base e Emissor quiescente tem amplitude V_{BE0} .



Estas variáveis estão relacionadas com os componentes do circuito e com as tensões aplicadas através das seguintes equações:

$$\text{Malha-1: } 0 - V_{BE0} + V_{BE0} + R_S \cdot I_{C0} + V_{E0} = 0$$

$$\text{Malha-2: } 0 - V_{E0} - R_S \cdot I_{C0} - V_{CE0} - R_C \cdot I_{C0} + V_{CC} = 0$$

Neste equacionamento foi desprezada a corrente de base. Assim, $I_{C0} \approx I_{E0}$

Pode ocorrer da tensão quiescente no coletor, V_o , ter um valor especificado no projeto. Neste caso, temos uma outra equação associada:

$$I_{C_0} = \frac{V_{CC} - V_o}{R_C}$$

Temos, ainda, a equação do transistor:

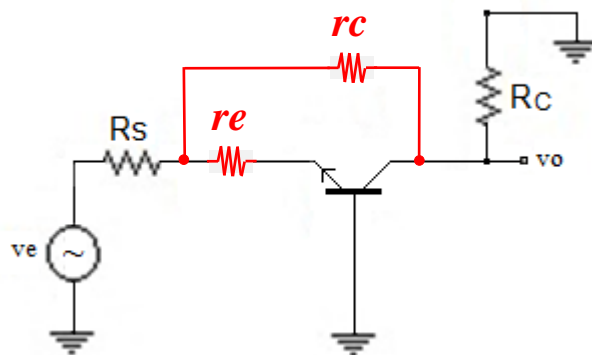
$$I_{C0} = I_s \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \left(1 + \frac{V_{CE0}}{|V_A|} \right)$$

Estas equações serão usadas de acordo com as variáveis conhecidas e com as variáveis que devem ser determinadas!

O objetivo da tarefa de polarização do transistor é determinar os valores dos componentes e das tensões aplicadas, que fazem com que o transistor conduza uma determinada corrente quiescente de coletor, I_{C_0} e que tenha determinadas tensões nos seus terminais.

Feito isto, parte-se para a determinação dos parâmetros incrementais, que permitirão prever o comportamento do circuito quando submetido a variações de pequena amplitude nas tensões dos seus terminais.

Para efetuar a análise incremental (análise de pequenos sinais), os elementos auxiliares r_e e r_c são alocados no diagrama esquemático do circuito, conforme mostrado abaixo:



Os valores destes elementos são derivados do valor de I_{C0} e dos parâmetros V_t e V_A

$$r_e = \frac{V_t}{I_{C0}}$$

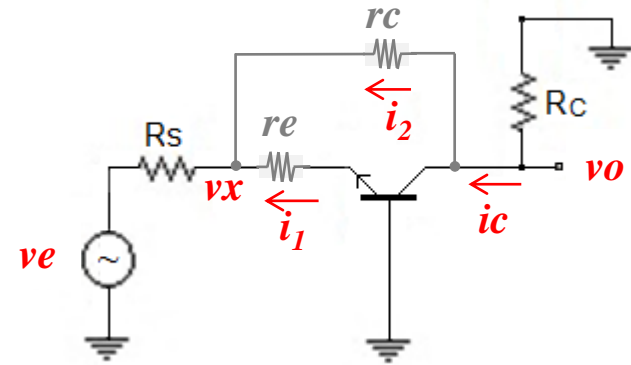
$$r_c = \frac{|V_A|}{I_{C0}}$$

Ao mesmo tempo, as tensões constantes são substituídas por “terra” e as correntes constantes, por circuitos abertos.

Por inspeção, temos:

$$i_1 = \frac{0 - v_x}{r_e} \quad i_2 = \frac{v_o - v_x}{r_c} \quad i_c = i_1 + i_2$$

$$v_x = v_e + R_s \cdot i_c \quad v_o = 0 - R_c \cdot i_c$$



Por substituição:
$$v_x = v_e - \frac{R_s}{R_c} v_o \quad \text{e} \quad v_o \left(1 + \frac{R_c}{r_c} \right) = R_c \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_c} \right) v_x$$

Ou ainda:
$$v_o \left(1 + \frac{R_c}{r_c} \right) = R_c \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_c} \right) v_e - R_s \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_c} \right) v_o$$

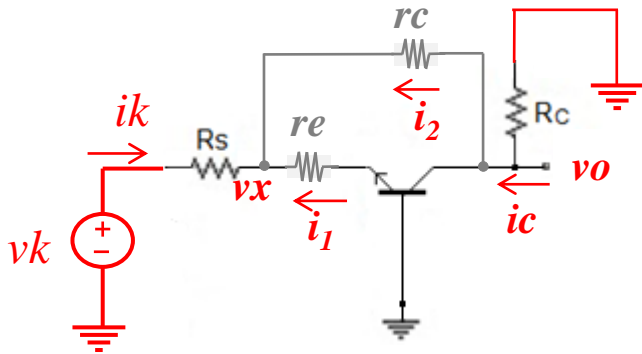
O ganho de tensão é dado por:

$$A_v \triangleq \frac{v_o}{v_e} = \frac{R_c \left(1 + \frac{r_e}{r_c} \right)}{r_e + R_s + \frac{r_e}{r_c} (R_c + R_s)}$$

É interessante notar que quando $r_c \rightarrow \infty$ o ganho de tensão converge para:

$$A_v \approx \frac{R_c}{r_e + R_s}$$

Para determinar a **resistência** (e não impedância) **de entrada**, em baixa frequência, deste circuito, devemos calcular qual é a variação de corrente (ik) que resulta de uma variação de pequena amplitude na tensão da entrada (vk), mantendo aterradas as demais entradas de tensão e abertas as de corrente.



Das duas equações acima, temos:

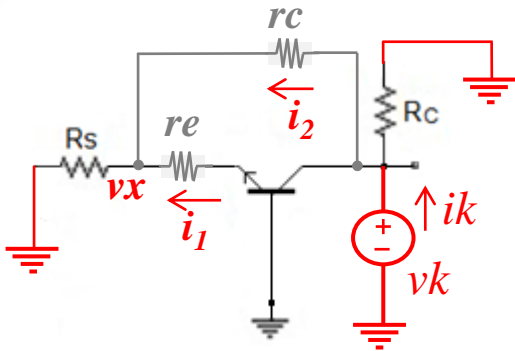
$$\text{Temos que: } ik = \frac{vk - vx}{Rs}$$

$$ik = \frac{vx}{re} + \frac{vx - vo}{rc} = \frac{vx}{re} + \frac{vx}{rc} + \frac{Rc}{rc}(-ik)$$

$$R_{in} \triangleq \frac{vk}{ik} = Rs + re \left(\frac{1 + \frac{Rc}{rc}}{1 + \frac{re}{rc}} \right)$$

Mais uma vez, observe que se $rc \rightarrow \infty$ a resistência de entrada será: $R_{in} = Rs + re$

Vejam agora como determinar a **resistência de saída**.



Como sempre, todas as tensões DC são aterradas e uma fonte de tensão incremental é conectada ao terminal de **saída**. Nestas condições:

$$ik = \frac{vk}{Rc} + \frac{vk - vx}{rc} + \frac{0 - vx}{re} \quad \text{e} \quad vx = Rs \left(ik - \frac{vk}{Rc} \right)$$

Logo:
$$ik = vk \left(\frac{1}{Rc} + \frac{1}{rc} \right) - Rs \cdot ik \left(\frac{1}{rc} + \frac{1}{re} \right) + Rs \frac{vk}{Rc} \left(\frac{1}{rc} + \frac{1}{re} \right)$$

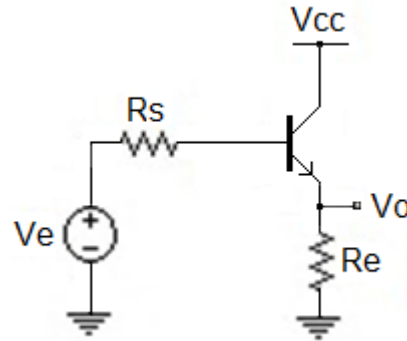
Ou ainda:
$$vk \left(\frac{re \cdot rc + Rc \cdot re + Rs \cdot re + Rs \cdot rc}{Rc} \right) = ik (rc \cdot re + Rs \cdot re + Rs \cdot rc)$$

Portanto:
$$R_o \triangleq \frac{vk}{ik} = \frac{\left[re + Rs \left(1 + \frac{re}{rc} \right) \right] Rc}{(re + Rs) + \frac{re}{rc} (Rc + Rs)}$$

Se $rc \rightarrow \infty$ $R_o \approx Rc$

Amplificador coletor comum (seguidor de emissor)

O circuito que implementa um amplificador coletor comum com transistor NPN é mostrado abaixo:



A fonte V_e tem uma componente DC, V_{e0} , e a componente incremental associada, que tem amplitude v_e , é a variável que deve ser amplificada.

R_s representa a resistência de saída da fonte V_e e R_e a resistência de carga, que neste caso está conectada ao emissor do transistor.

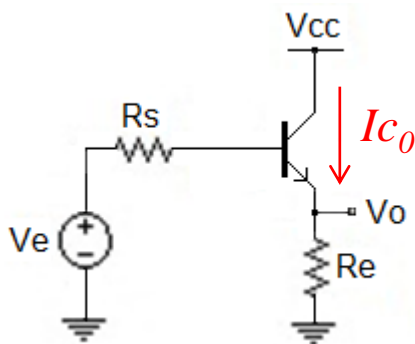
$$V_e = V_{e0} + v_e$$

↑
Componente DC (polarização)

↑
Componente incremental

A polarização do transistor, neste circuito, é definida, essencialmente, pela tensão V_{e_0} e pela resistência de carga R_e .

Desprezando a corrente de base, pode-se afirmar que as tensões DC na base e no emissor do transistor são dadas por:



$$V_{BASE} = V_{e_0}$$

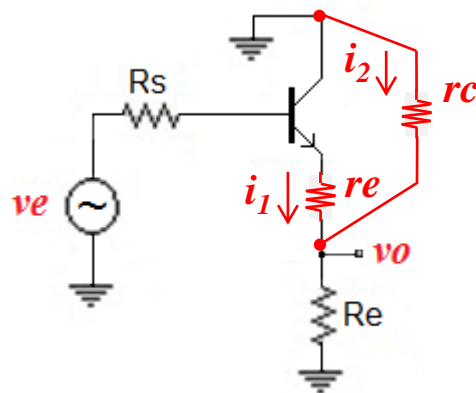
$$V_{EMISSOR} = V_o = R_e \cdot I_{c_0}$$

$$\text{Logo, temos que: } V_{BE0} = V_{e_0} - R_e \cdot I_{c_0}$$

Para determinar os valores dos componentes que perfazem este circuito, além das equações acima, lembrar que o transistor é regido pela equação:

$$I_{c_0} = I_s \cdot e^{\frac{V_{BE0}}{V_t}} \left(1 + \frac{V_{CE0}}{|V_A|} \right) \quad \text{em que: } V_{CE0} = V_{CC} - V_o$$

Para efetuar a análise incremental (análise de pequenos sinais), os elementos auxiliares r_e e r_c são alocados no diagrama esquemático do circuito, conforme visto anteriormente, e as tensões constantes são aterradas.



Por inspeção, temos:

$$i_1 = \frac{ve - vo}{re}$$

$$i_2 = \frac{0 - vo}{rc}$$

$$vo = Re(i_1 + i_2) \Rightarrow vo = Re\left(\frac{ve}{re} - \frac{vo}{re} - \frac{vo}{rc}\right)$$

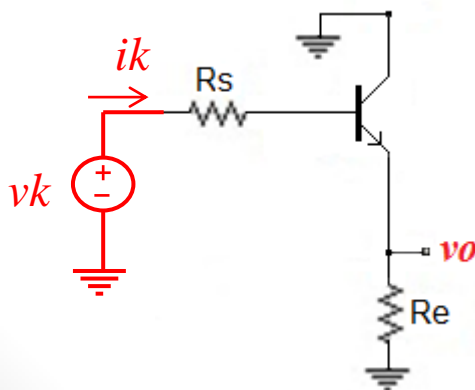
Portanto, o ganho incremental de tensão é:

$$Av \triangleq \frac{vo}{ve} = \frac{Re}{re + Re\left(\frac{re}{rc} + 1\right)}$$

Se $rc \rightarrow \infty$

$$Av \approx \frac{Re}{re + Re}$$

A **resistência** (e não impedância) **de entrada**, em baixa frequência, deste circuito, pode ser calculada, aplicando-se uma fonte de tensão incremental (vk) na entrada e determinando qual é a variação de corrente (ik) resultante da variação de pequena amplitude em (vk). Todas as tensões DC devem ser mantidas aterradas e abertas as fontes DC de corrente.

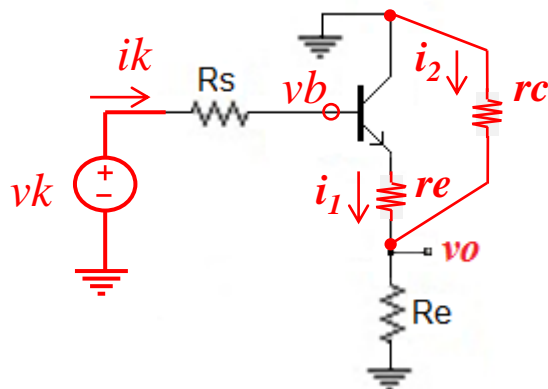


Neste caso, é evidente que a corrente ik coincide com a corrente de base do transistor.

$$ik = i_{BASE} = \frac{ic}{\beta}$$

Se desprezarmos a corrente de base, a resistência de entrada do circuito tende a infinito!

Se, por outro lado, a corrente de base, não for desprezível, aplica-se o seguinte equacionamento:



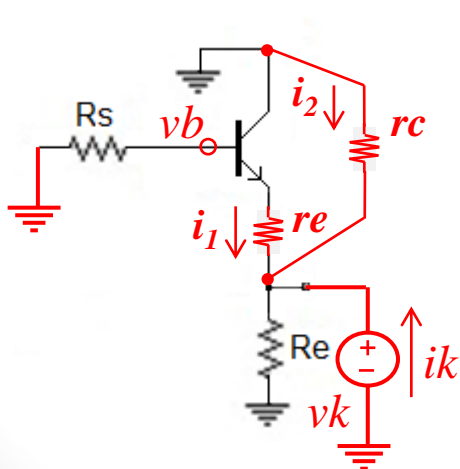
$$i_k = \frac{i_1 + i_2}{\beta} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{v_b}{r_e} - v_o \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_c} \right) \right]$$

$$v_b = v_k - R_s \cdot i_k \quad \text{e} \quad v_o = R_e \cdot \beta \cdot i_k$$

$$i_k = \frac{v_k - R_s \cdot i_k}{\beta \cdot r_e} - R_e \cdot i_k \left(\frac{1}{r_e} + \frac{1}{r_c} \right)$$

$$R_{in} \triangleq \frac{v_k}{i_k} = R_s + \beta (R_e + r_e) + \beta \left(\frac{R_e \cdot r_e}{r_c} \right)$$

Para determinar a resistência de saída, todas as tensões DC são aterradas e uma fonte de tensão incremental v_k é conectada ao terminal de **saída**.



A corrente de base, neste caso, só é relevante quando a resistência R_s tem um valor muito alto porque causa um deslocamento significativo na tensão v_b ! Assim, para simplificar, vamos desprezar a corrente de base.

$$i_k + i_1 + i_2 = \frac{v_k}{R_e} \quad i_1 = \frac{0 - v_k}{r_e} \quad i_2 = \frac{0 - v_k}{r_c}$$

Destas equações, resulta que: $R_o = R_e \parallel r_e \parallel r_c$